

# フラクタル・スケールフリー・ネットワーク上の異常拡散と 二重スペクトル次元

北大院・工<sup>A</sup>

下條 源太郎<sup>A</sup>, 山本 潤<sup>B</sup>, 矢久保 考介<sup>A</sup>

**Anomalous diffusion with two spectral dimensions on a fractal scale-free network**

<sup>A</sup>*Dept. Appl. Phys., Hokkaido Univ.,*

<sup>B</sup>*Sch. Math. Sci., Queen Mary Univ. London*

**G. Shimojo<sup>A</sup>, J. Yamamoto<sup>B</sup> and K. Yakubo<sup>A</sup>**

WWW やタンパク質相互作用ネットワークなど、現実の複雑系を記述するネットワークにはフラクタル性とスケールフリー性を同時に有するものが多数存在する。このようなフラクタル・スケールフリー・ネットワーク(FSFN)の局所構造は、2種類の局所フラクタル次元 $d_f^{\min}$ ,  $d_f^{\max}$ により記述されるバイフラクタル性を有することが示されている[1]。しかしながら、ネットワークのバイフラクタル性がネットワーク上のダイナミクスにどのような影響を与えるかについては未だ明らかにされていない。特に、ネットワーク上の拡散現象は、情報の拡散、感染症の蔓延、同期現象など様々な現象と密接に関係するため、その理解は急務の課題である。FSFN上のランダム・ウォークに関する過去の研究により、拡散中心となるノードの次数によって拡散の様子が大きく変わることは示されている[2]。しかし、これらの振舞は平均場理論によって予想されるものであるため、特定のノード周りの局所フラクタル性とランダム・ウォークとの関係は明らかにされていない。

そこで本研究では、特定ノードを拡散中心とした際のランダム・ウォークの振舞をネットワークのバイフラクタル性と結びつけて解明する研究を行った。具体的には、平均拡散距離( $l$ )を支配するウォーク次元 $d_w$ と自己回帰確率 $P_0(t)$ を支配するスペクトル次元 $d_s$ が拡散中心近傍の局所フラクタル性とどのように関係するかを、ジェネレーター・モデル[3]による決定論的階層FSFNや確率的階層FSFN、および臨界スケールフリー・ランダムグラフのような非階層的FSFNなど、極めて広いクラスのFSFNに対して解析的・数値的に調べた。その結果、ウォーク次元 $d_w$ は拡散中心がネットワーク上のどこであっても一定の値を取り、バイフラクタル性の影響を受けないことが明らかになった。これに対し、スペクトル次元は高次数ノード(ハブ)が拡散中心となった際は $d_s^{\min}$ 、ハブから十分に離れた低次数ノードが拡散中心となった際は $d_s^{\max}(\geq d_s^{\min})$ となり、拡散中心近傍の局所フラクタル性に依じて二つの値を取ることを示した。また、FSFNの次数分布が $P(k) \propto k^{-\gamma}$ であれば、 $d_s^{\min} = d_s^{\max}(\gamma - 2)/(\gamma - 1)$ という簡単な関係が成立することも明らかにした。

[1] J. Yamamoto and K. Yakubo, arXiv:2304.13438.

[2] S. Hwang, D.-S. Lee, and B. Kahng, Phys. Rev. E **85**, 046110 (2012).

[3] K. Yakubo and Y. Fujiki, PLoS ONE **17**, e0264589 (2022).